

XII Simposio Iberoamericano sobre planificación de sistemas de abastecimiento y drenaje

“MARCO DINÁMICO BASADO EN LA METODOLOGÍA AHP PARA LA TOMA DE DECISIONES PARTICIPATIVA EN LA GESTIÓN DE FUGAS DE AGUA”

Laura Carrión (1), Julio Benítez (2), Joaquín Izquierdo (3), Rafael Pérez García (4)

(1) Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España, laucarsa@cam.upv.es

(2) IMM, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España, jbenitez@upv.mat.es

(3) (4) FluIng-IMM, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, España, jizquier@upv.es, rperez@upv.es

RESUMEN

Adoptar un enfoque proactivo en la toma de decisiones es fundamental en las políticas de control de fugas de un abastecimiento de agua urbana, un proceso que puede resultar complicado por los muchos factores a tener en cuenta: objetivos, normativas, criterios relevantes, alternativas posibles y actores involucrados.

Para tener en cuenta todos estos aspectos, se presenta un marco dinámico basado en la metodología AHP en la línea ya iniciada por los autores que se expone brevemente con nuevas aportaciones en la búsqueda del consenso de todas las partes implicadas, incluso aquellas que no estén familiarizadas con todos los criterios.

Palabras claves: Toma de decisiones, abastecimiento de agua, control de fugas, metodología AHP, consenso.

ABSTRACT

Adoption of a proactive approach in decision-making is essential in leak control policies by urban water supply companies. It is a decision process that may be complex for several reasons: objectives, directives, relevant criteria, feasible alternatives and actors involved.

To deal with all these aspects, we propose a dynamic framework based on the methodology AHP (Analytic Hierarchy Process) in the line developed by the authors and presented briefly with new contributions in the research of a consensus of the judgments from all stakeholders involved, even if they are not completely familiar with all the criteria under consideration.

Key words: Water supply, leak control, decision-making, analytic hierarchy process, consensus.

SOBRE EL AUTOR PRINCIPAL

Laura Carrión Sánchez: nacida en Valencia (España) en 1987, es ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Valencia, en la especialidad de Hidráulica y Medio Ambiente, realizando el proyecto final de carrera en la Danmarks Tekniske Universitet (Dinamarca). Actualmente, realiza el Máster Oficial en Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente y colabora en el grupo de investigación FluIng-IMM de la Universidad Politécnica de Valencia.

ANTECEDENTES E INTRODUCCIÓN

En los abastecimientos de agua actuales, adoptar políticas adecuadas de control de fugas por parte de las empresas es esencial para una correcta gestión de los recursos hídricos. Este proceso puede resultar complicado debido a los muchos factores a tener en cuenta: trazar el objetivo a conseguir, reunir toda la información relevante para establecer los criterios y alternativas adecuados y tener en cuenta las preferencias y opiniones de todos los actores implicados. Los criterios, con frecuencia, no se pueden comparar unos con otros bajo la misma unidad de medida y resulta interesante tener en cuenta no sólo aspectos técnicos y económicos, sino también sociales y medioambientales (Delgado-Galván, 2011). Además, las normativas y las necesidades actuales de la sociedad son cambiantes y hacen que se tengan que incorporar criterios nuevos o eliminar los que se consideren obsoletos. También se tiende a que intervengan todos los actores involucrados. Esto incrementa aún más la dificultad al proceso si alguno de los mismos no está completamente familiarizado con todos los criterios y emite un cuerpo de opinión incompleto (Benítez *et al.*, 2012), o bien, si estos juicios emitidos son muy distintos entre ellos y se busca un consenso del grupo de actores. Actualmente los procesos de decisión colaborativos no solo son cada día más frecuentes, sino que a veces vienen impuestos por directivas a distintos niveles (véase por ejemplo *The EU Water Framework Directive* (EU-WFD, 2000)) y, por ello, es importante que se tenga en cuenta los conocimientos y opiniones de los gestores y partes interesadas.

La metodología AHP introducida por Saaty (1977, 2003, 2008) puede ser adaptada para integrar todos estos aspectos porque permite jerarquizar el problema en términos de objetivos, criterios y alternativas creando un marco interesante para la toma de decisiones. En la literatura existen numerosos problemas asociados a esta metodología. En el presente trabajo se aportan nuevas contribuciones a la línea de investigación ya iniciada por los autores en la que han abordado los aspectos anteriores (Delgado-Galván *et al.*, 2013).

Estas nuevas aportaciones buscan el consenso de grupos de actores involucrados que emiten sus juicios. En AHP, existen diversas metodologías de agregación de juicios, siendo dos las más populares: a) agregar las opiniones individuales con respecto a cada conjunto de comparaciones por pares para producir una jerarquía agregada (AIJ); b) sintetizar cada una de las jerarquías individuales y agregar las

prioridades resultantes (AIP) (Forman and Peniwati, 1998). En la práctica, ambos métodos son fáciles de implementar y se usan prácticamente sin distinción pero la agregación de opiniones subjetivas es más compleja y el método empleado puede influir en la decisión (Wen-Hsiang Wu *et al.*, 2008). Para establecer las medias, tanto la media aritmética como la geométrica son procedimientos adecuados para ser aplicados o bien en AIJ o bien en AIP. En este trabajo abordamos el consenso de distintos grupos de actores en tres aplicaciones para la gestión de fugas de un abastecimiento de agua urbana.

BASE CIENTÍFICO-TEÓRICA Y METODOLOGÍA

Método de las jerarquías analíticas (AHP)

El método de las jerarquías analíticas, desarrollado por Thomas L. Saaty (1977), proporciona un marco racional y comprensivo que permite estructurar un problema de decisión complejo mediante la construcción de un modelo jerárquico estructurado en tres niveles: objetivo, criterios y alternativas. Esta metodología representa y cuantifica sus elementos, relacionándolos con los objetivos generales y evaluando las alternativas. Una vez es establecida la jerarquía, se realizan comparaciones por pares entre dichos elementos (criterios y alternativas) formando matrices de comparación que representan los juicios emitidos por el tomador de decisiones según una escala de valores (Saaty 1980, 2001). El número de elementos comparativos no debe exceder de $n = 7 \pm 2$ (Miller, 1955).

Tabla 1. Escala de Saaty para la comparación entre pares de elementos.

Juicio verbal Escala de Saaty	($a_{i,j}$)
Importancia absoluta del elemento i sobre el elemento j	9
Muy marcada importancia del elemento i sobre el elemento j	7
Marcada importancia del elemento i sobre el elemento j	5
Poca importancia del elemento i sobre el elemento j	3
Igual importancia o indiferencia entre i y j	1
Poca importancia del elemento j sobre el elemento i	1/3
Marcada importancia del elemento j sobre el elemento i	1/5
Muy marcada importancia del elemento j sobre el elemento i	1/7
Importancia absoluta del elemento j sobre el elemento i	1/9

Fuente: Saaty, 1980.

En primer lugar, partiendo de la escala de valores, se construye una matriz cuadrada positiva $A = [a_{ij}]$; $i \leq i, j \leq n$ donde a_{ij} representa la comparación entre el elemento i y el elemento j , y n es el número de elementos comparados. Posteriormente procedemos a realizar lo mismo con las alternativas. Estas matrices de comparación deben cumplir una serie de propiedades:

1. Homogeneidad: Si los elementos i y j son considerados iguales en importancia. Entonces se cumple que $a_{ij} = a_{ji} = 1$.
2. Reciprocidad: Si $a_{ij} = x$, entonces $a_{ji} = \frac{1}{x}$.
3. Consistencia: Si $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ para todo $i, j, k = 1, \dots, n$.

El valor propio principal de una matriz (λ_{\max}) y su vector propio asociado (w) proporcionan información para la toma de decisiones. Este vector propio normalizado es el denominado vector de Perron y otorga el vector de prioridades que se busca (Saaty, 2003, 2008).

De forma habitual la matriz de comparaciones A no es consistente porque los valores que emite un determinado actor al realizar las comparaciones por pares pueden implicar pequeñas perturbaciones sobre los valores "correctos" al tratarse de información subjetiva. Sin embargo, se acepta la hipótesis de que estas perturbaciones garantizan perturbaciones también pequeñas para los valores propios (Stewart, 2001) y es por esto que AHP admite cierto grado de inconsistencia. En general, se puede resolver el problema según la teoría Perron-Frobenius (Meyer, 2000) resolviendo el problema del valor propio $Aw = \lambda_{\max} w$ donde $\lambda_{\max} \geq n$ es el valor propio único más grande de A y es el que se corresponde con el vector de Perron. Para medir el grado de inconsistencia, Saaty propone utilizar el

índice de consistencia $IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$ así como una

tasa de consistencia $TC = \frac{IC}{IC^*}$ siendo IC^* el índice de consistencia aleatorio (Saaty 2008). Si se cumple que $TC > 0.1$, la estimación se acepta. Si ocurre lo contrario, una nueva matriz de consistencia es

buscada hasta que cumpla que la tasa de consistencia se encuentre por debajo del 10%.

Mejora de la consistencia: proceso de linealización

Existen diversas propuestas en la literatura para mejorar la consistencia de una matriz. En este trabajo se utilizará la denominada técnica de linealización ya desarrollada por los autores en diversos trabajos (Benítez *et al.*, 2011b), junto con una solución de compromiso entre un nivel aceptable de consistencia y la aceptación de los cambios en los juicios por parte de los expertos. Como ya se ha mencionado anteriormente, la mayoría de matrices de comparación que emiten los actores implicados no son consistentes ni tienen un grado de consistencia aceptable. De forma concisa, el proceso de linealización (Benítez *et al.*, 2011b) encontrará la matriz de comparación consistente más

próxima a la matriz original emitida $A = [a_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ mediante la proyección ortogonal de $L(A)$ en $\mathcal{L}_n = \{L(A): A \text{ matriz } n \times n \text{ positiva y consistente}\}$, que resulta ser un subespacio de dimensión $n - 1$ del espacio de las matrices $n \times n$. La aplicación L asocia a una matriz positiva $X = (x_{ij})$ la matriz cuyo elemento (i,j) es $\log(x_{ij})$. Esta proyección ortogonal viene dada por la expresión de Fourier,

$$p_n(L(A)) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\text{traza}(L(A)^T \phi_n(y_i))}{\|\phi_n(y_i)\|} \phi_n(y_i) \quad (1)$$

donde ϕ_n se define mediante $\phi_n(v) = v \mathbf{1}_n^T - \mathbf{1}_n v^T, v \in R^n$, siendo $\mathbf{1}_n$ el vector $(1 \dots 1)^T$ de R^n , y $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ una base del complemento ortogonal de la envoltura lineal de $\mathbf{1}_n$, pudiéndose probar que $\{\phi_n(y_1), \dots, \phi_n(y_{n-1})\}$ es una base de \mathcal{L}_n (Benítez *et al.*, 2012).

Si la matriz inicial es recíproca, la proyección ortogonal se puede simplificar a una expresión más sencilla,

$$p_n(L(A)) = \frac{\mathbf{1}}{n[(L(A)U_n) - (L(A)U_n)^T]} \quad (2)$$

donde $U_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T$ (Benítez *et al.*, 2013a).

Como esta fórmula sólo implica operaciones de sumas, la eficiencia computacional está garantizada y su integración en un sistema soporte a la decisión basado en AHP es sencillo y de gran interés.

Finalmente, la matriz consistente más próxima a A resulta ser $A^C = E[(p)_n(L(A))]$, donde E asocia a una matriz $X = (x_{ij})$ la matriz cuyo elemento (i,j) es $\exp(x_{ij})$.

El proceso de linealización completo se describe como un simple proceso matricial que emplea las funciones logaritmo y exponencial y la proyección ortogonal $p_n(L(A))$:

$$A \xrightarrow{L} L(A) \xrightarrow{p_n} p_n(L(A)) \xrightarrow{E} A^C \quad (3)$$

Terminación consistente de juicios incompletos

Además, en ocasiones, puede que alguno de los actores implicados no esté completamente familiarizado con todos los criterios, por lo que el cuerpo de opinión queda incompleto. Para superar esta debilidad, los autores han propuesto un marco que permite que los actores implicados puedan emitir sus juicios de forma parcial y/o incompleta estableciendo un mecanismo para obtener una matriz de comparación consistente de una matriz a la que le faltan algunas de sus entradas (Benítez *et al.*, 2013b).

Solución de compromiso

El proceso de linealización proporciona, para una matriz A positiva y recíproca, una matriz A^C que es la matriz consistente más próxima a la matriz de comparaciones original A . Esta nueva matriz obtenida supone una ligera modificación respecto a los juicios emitidos por el agente implicado y puede no ser aceptada por este debido a que se trata de una matriz obtenida para mejorar la consistencia y puede no ser representativa de su opinión. En este punto, se debe establecer un 'feedback' entre la experiencia que aporta el tomador de decisiones y la consistencia que requiere la metodología para alcanzar una solución de compromiso aceptable. La matriz de la que se obtenga el vector de prioridades (vector de Perron) será aquella que, tras ser modificada y aceptada por el actor, exhiba un TC 0.1 (Benítez *et al.*, 2011a).

Consenso entre las partes interesadas

Por último, se tratará el consenso bajo varias posibilidades. Los juicios emitidos de manera individual pueden ser agregados de diversas maneras, ya sea mediante la agregación de los juicios individuales (AIJ) o bien de la agregación de las prioridades individuales (AIP). Para realizar la agrupación tanto de juicios como de prioridades, los métodos utilizados por excelencia son la media aritmética (AMM) y la geométrica (GMM). En el primer caso (AIJ), cada uno de los actores implicados expresa su cuerpo de opinión de forma individual que se refleja en cada una de las matrices de comparación. Estas matrices serán agregadas, bien mediante la media aritmética o bien mediante la media geométrica, en una sola que será la matriz grupal a la que se le aplique la metodología AHP.

$$A_{AIJ-AMM} = [a_{ij}]_{m \times n} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum_{k=1}^m a_{12}^k}{m} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^m a_{1n}^k}{m} \\ m & 1 & & \frac{\sum_{k=1}^m a_{2n}^k}{m} \\ \frac{\sum_{k=1}^m a_{12}^k}{m} & & \ddots & \vdots \\ m & & m & 1 \\ \frac{\sum_{k=1}^m a_{1n}^k}{m} & \dots & \frac{\sum_{k=1}^m a_{2n}^k}{m} & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A_{AIJ-GMM} = [a_{ij}]_{m \times n} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{12}^k} & \dots & \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{1n}^k} \\ \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{12}^k}} & 1 & & \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{2n}^k}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{1n}^k}} & \dots & \frac{1}{\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_{2n}^k}} & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde $k = 1, 2, \dots, m$ expertos; $i, j = 1, 2, \dots, n$ criterios. Si los actores implicados tienen distinta relevancia, se ponderan sus juicios con pesos α^k y se obtienen las medias aritmética, WAMM, y geométrica, WGMM, ponderadas de las matrices de comparación:

$$A_{AIJ-WAMM} = [a_{ij}]_{m \times n} =$$

$$[\mathbf{1}(\mathbf{1} \otimes \sum_{k=1}^m \mathbf{1})^T]^{-1} \mathbf{m} \otimes [\mathbf{a}_{12} \mathbf{1}^T \mathbf{k} \mathbf{a}_1^T \mathbf{k}] / (\sum_{k=1}^m \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \quad (6)$$

$$A_{AII-WGMM} = [a_{ij}]_{n \times n} =$$

$$[\mathbf{1}(\mathbf{1} \otimes \Pi_{k=1}^m \mathbf{1})^T]^{-1} \mathbf{m} \otimes [\mathbf{a}_{12} \mathbf{1}^T \mathbf{k}]^{-1} (\mathbf{a}_1^T \mathbf{k}) \otimes \dots \otimes \Pi_{k=1}^m (\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1} \otimes [\mathbf{a}_{12} \mathbf{1}^T \mathbf{k}] \quad (7)$$

Es conveniente destacar que en (7) y en (11), la potenciación no es la usual; sino es la llamada 'elemento a elemento', es decir, si X es una matriz y r es un real, entonces el elemento (i,j) de X^r es $(X_{ij})^r$.

En el segundo caso (AIP), se aplica la metodología AHP por separado a cada una de las matrices de comparación individuales obteniendo de cada una su vector de prioridades normalizado $w^k = [w_1^k \ w_2^k \ \dots \ w_n^k]$. Son estos vectores los que son agregados mediante la media aritmética y la geométrica para obtener un único vector que exprese las prioridades del grupo:

$$w_{AIP-AMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\frac{\sum_{k=1}^m w_1^k}{m} \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_2^k}{m} \quad \dots \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_n^k}{m} \right] \quad (8)$$

$$w_{AIP-GMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\sqrt[m]{\prod_{k=1}^m w_1^k} \quad \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m w_2^k} \quad \dots \quad \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m w_n^k} \right] \quad (9)$$

Para aquellos casos en los que las partes implicadas tengan distinta importancia, se realizan las correspondientes medias ponderadas WAMM y WGMM:

$$w_{AIP-WAMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\frac{\sum_{k=1}^m w_1^k \alpha^k}{\sum_{k=1}^m \alpha^k} \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_2^k \alpha^k}{\sum_{k=1}^m \alpha^k} \quad \dots \quad \frac{\sum_{k=1}^m w_n^k \alpha^k}{\sum_{k=1}^m \alpha^k} \right] \quad (10)$$

$$w_{AIP-WGMM} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = \left[\prod_{k=1}^m [(w_1^k)^{\alpha^k}] \quad \prod_{k=1}^m [(w_2^k)^{\alpha^k}] \quad \dots \quad \prod_{k=1}^m [(w_n^k)^{\alpha^k}] \right]^{\frac{1}{\sum_{k=1}^m \alpha^k}} \quad (11)$$

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se realizará la aplicación de la metodología desarrollada en diferentes procesos de toma de decisiones. Se ha consultado a tres grupos distintos de actores involucrados a empresas de gestión de agua urbana. En todos los casos, el objetivo es la selección de una política adecuada de gestión de fugas y se han considerado como principales alternativas el control activo de fugas (ALC), es decir, tomar acciones de forma preventiva y, por otro lado, el control pasivo de fugas (PLC) en el que únicamente se reparan las fugas reportadas y evidentes. Entre los distintos criterios sobre los que los actores implicados emitirán sus juicios, se van a considerar no sólo aspectos técnicos sino también sociales y ambientales como externalidades que se ven afectadas debido a las fugas que se puedan producir en el sistema de abastecimiento.

En el primer caso, tres expertos emitirán sus juicios sobre cuatro criterios diferentes (Tabla 2); en el segundo caso, cuatro expertos lo harán sobre los cinco criterios que se muestran en la Tabla 3 y, por último, sobre el conjunto de siete criterios, serán cinco expertos los que se tengan en cuenta (Tabla 4).

Tabla 2. Criterios para tres actores

3 actores	
C1	Coste del desarrollo del plan y su implementación
C2	Daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio
C3	Corte del suministro
C4	Cierre total o parcial de caminos

Tabla 3. Criterios para cuatro actores

4 actores	
C1	Coste del desarrollo del plan y su implementación
C2	Presupuestos y créditos
C3	Recuperación inversión
C4	Coste social
C5	Coste ambiental

Tabla 4. Criterios para cinco actores

5 actores	
C1	Coste del desarrollo del plan y su implementación
C2	Daño a bienes muebles, inmuebles y a otras redes de servicio
C3	Corte del suministro
C4	Cierre total o parcial de caminos

C5	Extracciones de agua
C6	Construcción de reservorios
C7	Emisiones de CO ₂

También puede ocurrir que el número de juicios para todos los expertos no coincida pero se requiera la valoración de todos en su conjunto, es decir, que el tamaño de las matrices no sea el mismo y que, para la consideración del grupo en conjunto, algunas matrices tengan ciertas entradas vacías correspondientes a varios criterios sobre los que el actor no ha emitido su juicio. El último caso que se analizará será el consenso del primero de los grupos de tres expertos que opinan sobre cuatro criterios (matrices 4×4) junto con el del grupo de cinco actores opinando sobre siete criterios (matrices 7×7) cuyos cuatro primeros criterios son los mismos que en el primer grupo. Puesto que el tamaño de las matrices no es coincidente y se requiere el consenso de las ocho partes implicadas, se procederá a completar de forma consistente las matrices de 4×4 a matrices de 7×7.

Para los casos de tres y ocho actores se van a realizar las cuatro metodologías de agregación de juicios (AIJ-AMM, AIJ-GMM, AIP-AMM y AIP-GMM). Además, para el caso de cuatro actores, dado que tienen distinta relevancia en sus cargos, son ponderados según su importancia a la hora de emitir sus juicios (AIJ-WAMM, AIJ-WGMM, AIP-WAMM y AIP-WGMM).

Tres actores

En esta primera aplicación, se tendrá en cuenta la valoración por parte del gestor de la empresa, del encargado del área de proyectos y del encargado del área de reparación de fugas. Todos tienen igual relevancia. Las matrices de comparación correspondientes a los juicios emitidos según los criterios de la Tabla 2 son los siguientes:

Tabla 5. Matrices de comparación de criterios para tres actores.

1	C1	C2	C3	C4	2	C1	C2	C3	C4
C1	1	2	5	7	C1	1	3	5	7
C2	1/2	1	5	5	C2	1/3	1	3	5
C3	1/5	1/5	1	2	C3	1/5	1/3	1	2
C4	1/7	1/5	1/2	1	C4	1/7	1/5	1/2	1

3	C1	C2	C3	C4
C1	1	5	3	7

C2	1/5	1	3	5
C3	1/3	1/3	1	2
C4	1/7	1/5	1/2	1

Además, los actores también han emitido sus juicios de comparación de alternativas según los criterios.

Tabla 6. Matrices de comparación de alternativas para tres actores.

1	C1	C2	C3	C4
ALC	1	5	1	3
PLC	1/5	1	3	1

2	C1	C2	C3	C4
ALC	1	7	1	2
PLC	1/7	1	5	1

3	C1	C2	C3	C4
ALC	1	7	1	2
PLC	1/7	1	5	1

Se procede a realizar las cuatro metodologías de agregación de juicios.

AIJ-AMM

La matriz resultante de realizar la media aritmética (4) de las matrices presentadas en la tabla 4 será a la que se le aplique la metodología AHP.

Tabla 7. Matriz AMM de criterios para tres actores.

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3.33	4.33	7
C2	0.34	1	3.67	5
C3	0.24	0.29	1	2
C4	0.14	0.2	0.5	1

Se cumplen los principios de positividad de componentes y homogeneidad. El de reciprocidad también se puede dar por válido (no habitual al realizar la media aritmética de matrices, a diferencia de la media geométrica que sí lo garantiza). Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\max} = 4.181$ y un valor de $TC=0.0677$ por lo que podemos considerar la matriz lo suficientemente consistente para no aplicar la linealización.

Se obtiene el vector de prioridades de la matriz grupal que resulta $w = (0.5611 \ 0.2748 \ 0.1052$

0.059)^T. Se procede de la misma manera con las alternativas:

Tabla 8. Matrices AMM de las alternativas para tres actores.

	C1	C2	C3	C4
ALC	1	6.33	1	2.33
PLC	0.17	1	4.33	1

Se cumple la característica de que todas las matrices de orden $n = 2$ que cumplen las propiedades de homogeneidad, reciprocidad y positividad, son consistentes. Es por esto que obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia.

Tabla 9. Vectores de prioridades w de las matrices AMM de las alternativas para tres actores.

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.862	0.192	0.768	0.697
PLC	0.138	0.808	0.232	0.304

Finalmente, del resultado de ponderar las alternativas (Tabla 9) según el vector de prioridades de los criterios, se obtiene el vector de prioridades para cada alternativa que resulta $w = (0.6583 \ 0.3418)^T$. El valor más alto en w está relacionado con la mejor alternativa y el valor más bajo con la peor alternativa.

AIJ-GMM

Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior pero realizando la media geométrica (5).

Tabla 10. Matriz GMM de criterios para tres actores.

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3.11	4.22	7
C2	0.32	1	3.56	5
C3	0.24	0.28	1	2
C4	0.15	0.2	0.5	1

La GMM cumple los principios de positividad de componentes, homogeneidad y reciprocidad al realizar la operación entre matrices. Respecto a la consistencia, se tiene un valor de $\lambda_{\max} = 4.1093$ y un valor de $TC = 0.0409$ por lo que está dentro de los límites de consistencia de $IC = 10\%$. Se obtiene el vector de prioridades de la matriz

grupal que resulta $w = (0.5567 \ 0.2765 \ 0.1063 \ 0.0605)^T$. Se procede de la misma manera con las alternativas:

Tabla 11. Matrices GMM de alternativas para tres actores.

	C1	C2	C3	C4
ALC	1	6.26	1	2.29
PLC	0.16	1	4.22	1

Como ya se ha comentado, al ser matrices de orden $n = 2$, obtenemos sus vectores de prioridades (AHP) sin calcular el índice de consistencia.

Tabla 12. Vectores de prioridades w de las matrices GMM de alternativas para tres actores.

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.862	0.192	0.768	0.696
PLC	0.138	0.808	0.233	0.304

Por último, el vector de prioridades para cada alternativa es $w = (0.6567 \ 0.3433)^T$.

AIP-AMM

En este caso, la metodología AHP se aplica a cada una de las matrices de comparación individuales tanto de criterios como de alternativas. En cada caso, se ha obtenido la tasa de consistencia de cada matriz para comprobar si requieren una mejora de la consistencia. Tras realizar el proceso, los vectores de prioridades que se obtienen de las matrices de comparación de criterios originales (o modificadas de forma consistente si es necesario) son $w_1 = (0.5097 \ 0.3351 \ 0.0944 \ 0.0608)^T$, $w_2 = (0.5693 \ 0.2643 \ 0.1055 \ 0.0609)^T$ y $w_3 = (0.5768 \ 0.2372 \ 0.1237 \ 0.0623)^T$.

Para el caso de las matrices de alternativas (no es necesario el cálculo de TC), los vectores de prioridades que se obtienen tras el proceso son los representados en la Tabla 13.

Tabla 13. Vectores de prioridades w de las matrices de alternativas originales para tres actores.

1	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
ALC	0.833	0.25	0.8	0.75
PLC	0.167	0.75	0.2	0.25

2	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}
---	----------	----------	----------	----------

ALC	0.875	0.167	0.75	0.667
PLC	0.125	0.833	0.25	0.333

3	W_{C1}	W_{C2}	W_{C3}	W_{C4}
ALC	0.875	0.167	0.75	0.667
PLC	0.125	0.833	0.25	0.333

Una vez obtenido los vectores de prioridades tanto de criterios como de las alternativas, se obtiene la media aritmética (8) de los mismos. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-AMM} = (0.5519 \ 0.2789 \ 0.1077 \ 0.0613)^T$.

Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio tenemos:

Tabla 14. Vectores AMM de los vectores de prioridades de las alternativas para tres actores.

	W_{C1}	W_{C2}	W_{C3}	W_{C4}
ALC	0.861	0.195	0.767	0.695
PLC	0.139	0.806	0.233	0.306

Finalmente, para cada alternativa tenemos que $w = (0.6546 \ 0.3452)^T$.

AIP-GMM

Para completar este primer grupo de actores, realizaremos el procedimiento anterior, pero empleando la media geométrica (9) en los vectores de prioridades obtenidos tras la aplicación de AHP. Estos vectores deben ser normalizados. El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-GMM} = (0.5536 \ 0.2772 \ 0.1077 \ 0.0616)^T$. Respecto a los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio tenemos:

Tabla 15. Vectores GMM de los vectores de prioridades de las alternativas para tres actores.

	W_{C1}	W_{C2}	W_{C3}	W_{C4}
ALC	0.862	0.192	0.768	0.696
PLC	0.138	0.808	0.233	0.304

Finalmente, para cada alternativa tenemos que $w = (0.656 \ 0.3441)^T$.

Cuatro actores

En este apartado, uno de los actores trabaja en una empresa de abastecimiento de aguas, el segundo en

el gobierno, otro en un instituto de investigación mejicano y el último desarrolla proyectos de agua potable. A cada uno se le ha otorgado un peso según la relevancia de sus opiniones ($\alpha_i = \{0.35 \ 0.15 \ 0.1 \ 0.4\}$ respectivamente) Las matrices de comparación correspondientes a los juicios emitidos según los criterios de la Tabla 3 son los siguientes:

Tabla 16. Matrices de comparación de criterios para cuatro actores.

1	C1	C2	C3	C4	C5	2	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1/3	3	7	9	C1	1	1	5	9	7
C2	3	1	1/3	5	7	C2	1	1	5	9	7
C3	1/3	3	1	5	7	C3	1/5	1/5	1	9	5
C4	1/7	1/5	1/5	1	1	C4	1/9	1/9	1/9	1	3
C5	1/9	1/7	1/7	1	1	C5	1/7	1/7	1/5	1/3	1
3	C1	C2	C3	C4	C5	4	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1	5	3	3	C1	1	1/3	5	7	7
C2	1	1	4	3	3	C2	3	1	3	5	5
C3	1/5	1/4	1	1/3	1/3	C3	0.2	1/3	1	3	3
C4	1/3	1/3	3	1	5	C4	1/7	1/5	1/3	1	1
C5	1/3	1/3	3	1/5	1	C5	1/7	1/5	1/3	1	1

Los actores también han emitido sus juicios de comparación de alternativas según los criterios.

Tabla 17. Matrices de comparación de alternativas para cuatro actores.

1	C1	C2	C3	C4	C5
ALC	1	3	1	5	1
PLC	1/3	1	1/5	1	1/5
2	C1	C2	C3	C4	C5
ALC	1	7	1	9	1
PLC	1/7	1	1/9	1	1/3
3	C1	C2	C3	C4	C5
ALC	1	4	1	3	1
PLC	1/4	1	1/3	1	1/5
4	C1	C2	C3	C4	C5
ALC	1	5	1	7	1
PLC	1/5	1	1/7	1	1/3

Una vez establecidos los datos, se procede a realizar las cuatro metodologías de agregación de juicios. El proceso es similar al realizado con el grupo de actores anterior, pero con las correspondientes

fórmulas de medias ponderadas. De forma breve se exponen los resultados.

AIJ-WAMM

Se obtienen los vectores de prioridades de las matrices de comparación de criterios mediante la metodología AHP, aplicando linealización si es necesario con su correspondiente ‘feedback’ con aquellos que han emitido los juicios. Se obtienen los vectores de prioridades de cada matriz de comparación de alternativas. A continuación, se obtienen los vectores de prioridades promedio: uno de las matrices de criterios y cinco de las de las alternativas según cada criterio mediante la fórmula (6). El vector de prioridades de los criterios que resulta del promedio es $w = (0.36 \ 0.3647 \ 0.1588 \ 0.0633 \ 0.0532)^T$.

Tabla 18. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de alternativas para cuatro actores.

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.812	0.785	0.791	0.636	0.681
PLC	0.188	0.215	0.209	0.364	0.319

Por último, el vector que determina que alternativa es más adecuada resulta ser $w = (0.7805 \ 0.2195)^T$.

AIJ-WGMM

Para el caso de la media geométrica ponderada, que se corresponde con la fórmula (7), el vector de prioridades de los criterios resultante al realizar la media es $w = (0.3589 \ 0.3778 \ 0.1599 \ 0.0558 \ 0.0476)^T$.

Tabla 19. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de alternativas para cuatro actores.

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.811	0.827	0.791	0.633	0.682
PLC	0.189	0.173	0.209	0.367	0.318

Finalmente, para cada alternativa tenemos que $w = (0.7977 \ 0.2023)^T$.

AIP-WAMM

Una vez obtenidos los vectores de prioridades (mediante la metodología AHP) de cada matriz de comparaciones de criterios originales, se realiza la media de estos vectores mediante la fórmula (10). El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-WAMM} = (0.3383 \ 0.372 \ 0.1798 \ 0.0611 \ 0.0488)^T$.

De forma similar, obtenemos los vectores de prioridades de las alternativas según cada criterio:

Tabla 20. Vectores de prioridades w de las matrices WAMM de las alternativas para cuatro actores.

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.806	0.801	0.786	0.621	0.667
PLC	0.194	0.199	0.214	0.379	0.333

Finalmente, para cada alternativa tenemos que $w = (0.7822 \ 0.2178)^T$.

AIP-WGMM

El vector de prioridades de los criterios resultante es $w_{AIP-WGMM} = (0.3503 \ 0.3812 \ 0.1634 \ 0.0568 \ 0.0483)^T$ mediante la fórmula (11). Los vectores de prioridades de las alternativas que se obtienen según cada criterio son:

Tabla 21. Vectores de prioridades w de las matrices WGMM de las alternativas para cuatro actores.

	w_{C1}	w_{C2}	w_{C3}	w_{C4}	w_{C5}
ALC	0.810	0.825	0.789	0.633	0.682
PLC	0.190	0.175	0.211	0.368	0.318

Para cada alternativa tenemos que $w = (0.7961 \ 0.2039)^T$.

Ocho actores

En esta sección, el grupo estará formado por 8 actores. Cinco de ellos procedentes de una empresa de abastecimiento de agua en México, de igual relevancia, que emiten juicios sobre los siete criterios de la Tabla 4 considerados; los otros tres serán los correspondientes al primer grupo analizado que opinan sobre los cuatro criterios de la Tabla 2, coincidentes con los primeros de la Tabla 4. De esta forma se tendrán ocho matrices, algunas de ellas rellenas con unos que es una forma de completar de forma consistente y coherente puesto que, si el actor en cuestión no ha opinado sobre ese criterio, es porque no lo considera relevante sobre otro.

Tabla 22. Matrices de comparación de criterios para ocho actores.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2	5	1	7	5	3
C2	1/2	1	2	1/2	5	2	1

C3	1/5	1/2	1	1/5	2	1	1/2
C4	1	2	5	1	7	3	2
C5	1/7	1/5	0.5	1/7	1	1/2	1/4
C6	1/5	1/2	1	1/3	2	1	1/2
C7	1/3	1	2	1/2	4	2	1

C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1/3	1/5	1	1/4	2	3
C2	3	1	1/2	2	1/3	3	3
C3	5	2	1	4	5	6	5
C4	1	1/2	1/4	1	1/4	1	2
C5	4	3	1/5	4	1	3	1
C6	1/2	1/3	1/6	1	1/3	1	1/3
C7	1/3	1/3	1/5	1/2	1	3	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	3	5	7	1	1	1
C2	1/3	1	3	5	1	1	1
C3	1/5	1/3	1	2	1	1	1
C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	1/3	1/5	1	1/4	2	3
C2	3	1	1/2	2	1/3	3	3
C3	5	2	1	4	5	6	5
C4	1	1/2	1/4	1	1/4	1	2
C5	4	3	1/5	4	1	3	1
C6	1/2	1/3	1/6	1	1/3	1	1/3
C7	1/3	1/3	1/5	1/2	1	3	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	5	3	7	1	1	1
C2	1/5	1	3	5	1	1	1
C3	1/3	1/3	1	2	1	1	1
C4	1/7	1/5	1/2	1	1	1	1
C5	1	1	1	1	1	1	1
C6	1	1	1	1	1	1	1
C7	1	1	1	1	1	1	1

Las matrices de comparación de alternativas según los criterios que han emitido los actores son:

Tabla 23. Matrices de comparación de alternativas para ocho actores.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	7	9	5	7	5	3
C2	1/7	1	5	9	5	7	5
C3	1/9	1/5	1	7	3	7	3
C4	1/5	1/9	1/7	1	7	5	5
C5	1/7	1/5	1/3	1/7	1	9	7
C6	1/5	1/7	1/7	1/5	1/9	1	5
C7	1/3	1/5	1/3	1/5	1/7	1/5	1

1	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7							
ALC	1	9	1	1/5	1	1/5	1	9						
PLC	1/9	1	5	1	5	1	1/3	1	3	1	5	1	1/9	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	9	7	9	5	7	9
C2	1/9	1	5	7	1/9	1/5	7
C3	1/7	1/5	1	7	1/9	1/9	9
C4	1/9	1/7	1/7	1	1/9	1/9	5
C5	1/5	9	9	9	1	7	9
C6	1/7	5	9	9	1/7	1	9
C7	1/9	1/7	1/9	1/5	1/9	1/9	1

2	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7							
ALC	1	1/8	1	5	1	5	1	1/3	1	4	1	1/5	1	6
PLC	8	1	1/5	1	1/5	1	3	1	1/4	1	5	1	1/6	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	1	2	5	7	1	1	1
C2	1/2	1	5	5	1	1	1
C3	1/5	1/5	1	2	1	1	1

3	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7							
ALC	1	9	1	1/3	1	1/5	1	1/3	1	1/3	1	1/5	1	9
PLC	1/9	1	3	1	5	1	3	1	3	1	5	1	1/9	1

4	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7							
ALC	1	7	1	3	1	7	1	7	1	9	1	7	1	5
PLC	1/7	1	1/3	1	1/7	1	1/7	1	1/9	1	1/7	1	1/5	1

5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7							
ALC	1	9	1	5	1	7	1	7	1	7	1	1/5	1	1/5
PLC	1/9	1	1/5	1	1/7	1	1/7	1	1/7	1	5	1	5	1

6	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
ALC	1	5	1/3	1	1/4	1	3
PLC	1/5	1	3	1	4	1	1/3

7	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
ALC	1	7	1/5	1	3	1	2
PLC	1/7	1	5	1	1/3	1	1/2

8	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
ALC	1	7	1/5	1	1/3	1	2
PLC	1/7	1	5	1	3	1	1/2

Procedemos como en los apartados anteriores y los vectores que ponderan cada una de las alternativas según cada proceso de agregación de datos resultan $w = (0.5972 \ 0.4028)^T$ para AIJ-AMM, $w = (0.6345 \ 0.3655)^T$ para AIJ-GMM, $w = (0.6218 \ 0.3781)^T$ para AIP-AMM y $w = (0.6466 \ 0.3534)^T$ para AIP-GMM.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A modo de resumen, presentamos todos los resultados obtenidos para los vectores de la elección de alternativas en las Tablas 24, 25 y 26.

Tabla 24. Resumen de resultados de prioridades para las alternativas para tres actores.

	AIJ		AIP	
	AMM	GMM	AMM	GMM
ALC	0.6583	0.6567	0.6546	0.656
PLC	0.3418	0.3433	0.3452	0.3441

Tabla 25. Resumen de resultados de prioridades para las alternativas para cuatro actores.

	AIJ		AIP	
	WAMM	WGMM	WAMM	WGMM
ALC	0.7805	0.7977	0.7822	0.7961
PLC	0.2195	0.2023	0.2178	0.2039

Tabla 26. Resumen de resultados de prioridades para las alternativas para ocho actores.

	AIJ		AIP	
	AMM	GMM	AMM	GMM
ALC	0.5972	0.6345	0.6218	0.6466
PLC	0.4028	0.3655	0.3781	0.3534

Resulta obvio que la mejor alternativa siempre es la de tomar un control activo de fugas antes que sólo reparar las fugas que son informadas pero lo que nos permite esta metodología es en qué medida invertir los recursos en la gestión de fugas. Los valores más altos los encontramos en el segundo caso en el que los criterios están enfocados más a aspectos económicos (los valores para el control activo de fugas rondan en torno al 80%) que en los otros casos (aproximadamente un 60%).

Respecto a las metodologías de agregación de juicios, los valores que se obtienen dentro de cada grupo son bastante similares. Existe cierta diferencia cuando aplicamos la media aritmética de las matrices de juicios en el caso de ocho expertos (AIJ-AMM). Esto se debe a que las opiniones de los actores que intervienen no son muy homogéneas y AIJ funciona mejor cuando los juicios son más similares entre sí. Además, cuando se aplica la media aritmética AMM, suele requerir mayor número de operaciones dado que no se cumple la propiedad de reciprocidad al ser aplicada entre matrices.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Las fugas en redes de abastecimiento de agua no sólo implican costes económicos sino también externalidades sociales y ambientales, de ahí la importancia de tener en cuenta los juicios de todas las partes implicadas y alcanzar un consenso. En el presente artículo, se han visto tres aplicaciones del proceso descrito donde se han analizado técnicas de agregación de juicios para tener en cuenta la opinión, de forma conjunta, de actores involucrados en la gestión de distintos abastecimientos de agua urbana.

Los resultados pretenden servir de guía para los tomadores de decisiones y para el intercambio de puntos de vista entre las partes interesadas respecto a la gestión.

En la literatura está ampliamente extendido el uso de la metodología AHP para procesos de toma de decisiones en grupo, puesto que permite jerarquizar el problema de forma gráfica observando el objetivo a alcanzar, las posibles alternativas, los criterios que son necesarios evaluar y tener en cuenta los juicios de todos los actores.

Para alcanzar el consenso, hemos empleado distintas técnicas de agregación de juicios. En general, todas obtienen buenos resultados pero se ha comprobado

que entre actores dentro del mismo grupo en el que sus opiniones son más homogéneas, AIJ funciona bien pero para alcanzar el consenso entre grupos de actores con opiniones que son diferentes, resulta más adecuado AIP. Por último, cuando se realiza AIJ, la AMM suele dar más problemas porque esta media entre matrices no suele cumplir la hipótesis de reciprocidad y conlleva mayor número de operaciones.

En cualquiera de los casos, cabe destacar la importancia de que exista un 'feedback' con las partes implicadas respecto a los resultados que se van obteniendo en cada parte del proceso matemático.

En futuras investigaciones esta metodología se puede aplicar a otros problemas relacionados con los sistemas de abastecimientos de agua, además de combinar las diferentes técnicas de agregación o establecer unas nuevas.

AGRADECIMIENTOS

Gracias por el apoyo recibido a través del proyecto de colaboración del IMM de la Universidad Politécnica de Valencia. También agradecimientos a la Dra. Xitlali V. Delgado Galván por la cesión de algunos de los datos utilizados.

BIBLIOGRAFÍA

- Benítez, J., Delgado-Galván, X., Gutiérrez, J.A., Izquierdo, J., (2011a). "Balancing consistency and expert judgment in AHP". Math. Comput. Model. 54, pp. 1785–1790.
- Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2011b). "Achieving matrix consistency in AHP through linearization". Appl. Math. Model. 35, pp. 4449–4457.
- Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2012). "An approach to AHP decision in a dynamic context". Decision Support Systems, 53, pp. 499-506.
- Benítez, J., Izquierdo, J., Pérez-García, R., Ramos-Martínez, E., (2013a). "A simple formula to find the closest consistent matrix to a reciprocal matrix". App. Math. Model., bajo revisión.
- Benítez, J., Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Pérez-García, R., (2013b). "Consistent completion of incomplete judgments in decision

making using AHP". Appl. Math. Comp., bajo revisión.

Delgado-Galván, X., (2011). Aplicación del método de las jerarquías analíticas (AHP) a la gestión de pérdidas de agua en redes de abastecimiento. Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Valencia. Valencia, 2011.

Delgado-Galván, X., Izquierdo, J., Benítez, J., Pérez-García, R. (2013). "Joint Stakeholder Decision-Making on the Management of the Silao-Romita Aquifer Using AHP". Environmental Modeling and Software. Artículo bajo revisión.

EU-WFD (2000). Directive 2000/60/EC of the European Parliament and of the Council establishing a framework for the Community action in the field of water policy. <http://ec.europa.eu/environment/water/water-framework/>

Forman, E., Peniwati, K., (1998). "Aggregating Individual Judgements and Priorities with the Analytic Hierarchy Process". Eur. J. of Oper. Res. 108, pp. 165-169.

Meyer, C.D. (2000), Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM.

Miller, G.A. (1955). "The Magical Number Seven, Plus or Minus Two. Some Limits on Our Capacity for Processing Information". The psychological Review 63, pp. 81-97.

Saaty, T.L., (1977). "A scaling method for priorities in hierarchical structures". J. of Math. Psychol. 15, pp. 234-281.

Saaty, T.L., (1980). The Analytic Hierarchy Process. New York: McGraw-Hill.

Saaty, T.L., (2001). The Analytic Network Process. RWS Pub., Pittsburgh.

Saaty, T.L., (2003). "Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary". Eur. J. of Oper. Res. 145, pp. 85-91.

Saaty, T. L., Peniwati, K., (2007). Group Decision Making: Drawing Out and Reconciling Differences. RWS Publications, Pittsburgh, PA.

Saaty, T.L., (2008a). "Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making. Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors". The Analytic Hierarchy/Network Process, Revista de la Real Academia de Ciencias Serie A: Matemáticas 102, pp. 251-318.

Saaty, T.L., (2008b). "Decision Making with the Analytic Hierarchy Process". Int. J. Serv. Sci. 1, pp. 83-98.

Stewart, G.W., (2001). Matrix Algorithms, vol. II, SIAM.

Wen-Hsiang Wu, Chang-tzu Chiang, Chin-tsai Lin, (2008)." Comparing the aggregation methods in the analytic hierarchy process when uniform distribution". WSEAS TRANSACTIONS on BUSINESS and ECONOMICS. Issue 3, Volume 5.